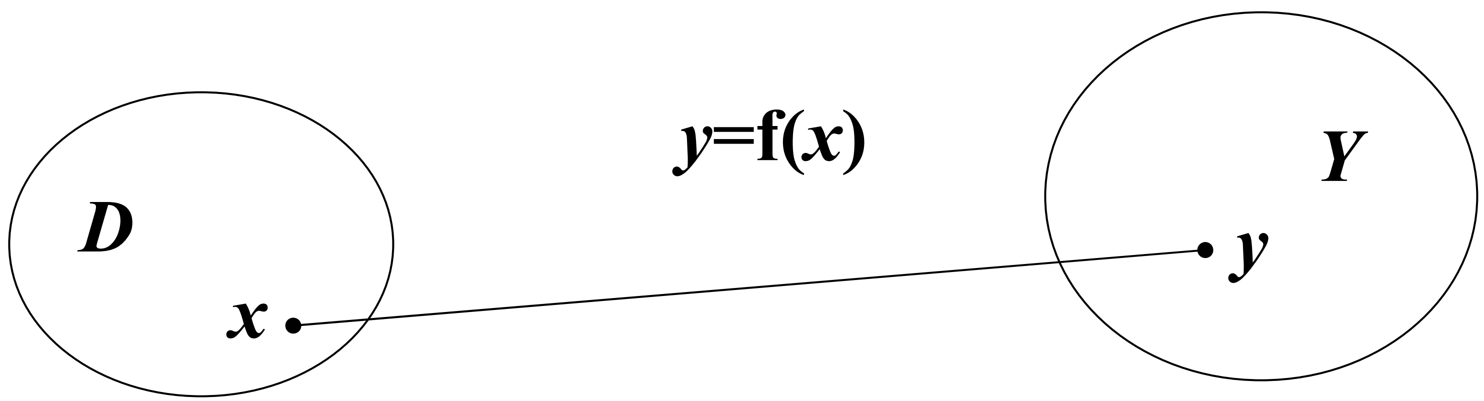
ЛЕКЦИЯ 2 по “Приложна математика”, сп. БИТ, 2009/2010
Доц. д-р Снежана Гочева, ПУ “П. Хилендарски”

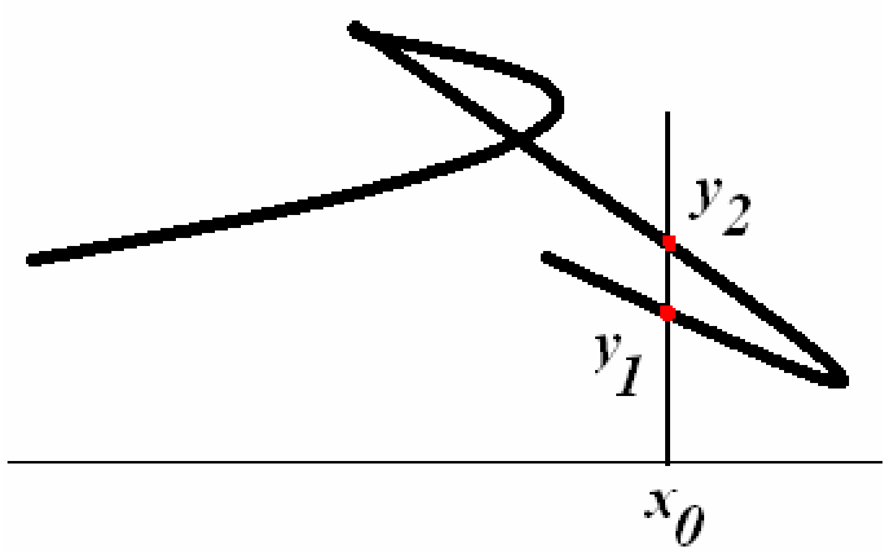
Тема 2. Функции – определение, свойства, граница и непрекъснатост на функции.

Определение 2.1. Функцията $y = f(x)$ е правило, по което на всеки елемент $x \in D$ (четем “хикс принадлежи на хикс голямо”), от едно числово множество ***D*** се съпоставя точно един елемент $y \in Y$ на друго числово множество ***Y***.



Означения: D - дефиниционно множество на функцията, Y - множество на значенията. Променливата x се нарича независима величина (аргумент) на функцията, а променливата y се нарича зависима променлива.

Пример 2.1. Следната графика НЕ е графика на функция, защото на един и същ аргумент x съответстват повече от една стойност, в случая за x_0 има 2 стойности - y_1 и y_2.



Начини на задаване на функции:

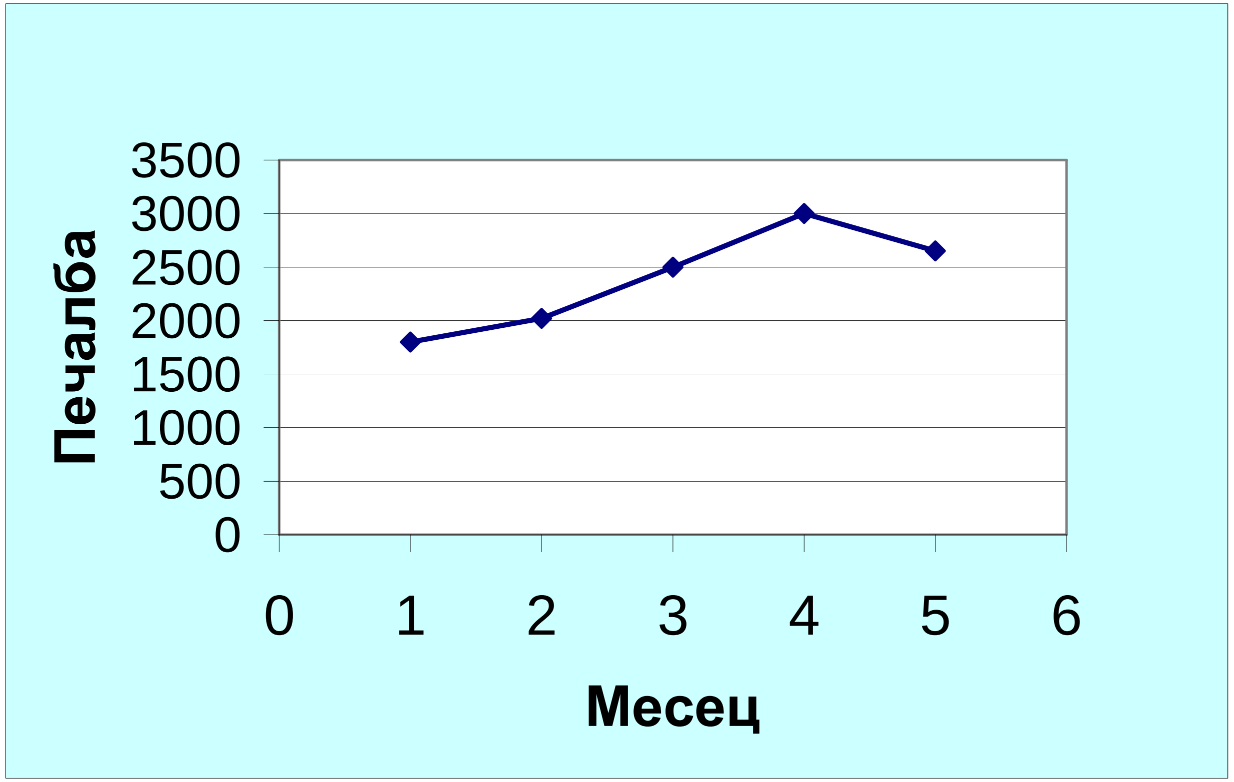
- Аналитично (с формула): напр. $y = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ (**)

Очевидно точките $x = \pm 1$ не са от дефиниционната област на тази функция.

- Таблично задаване:

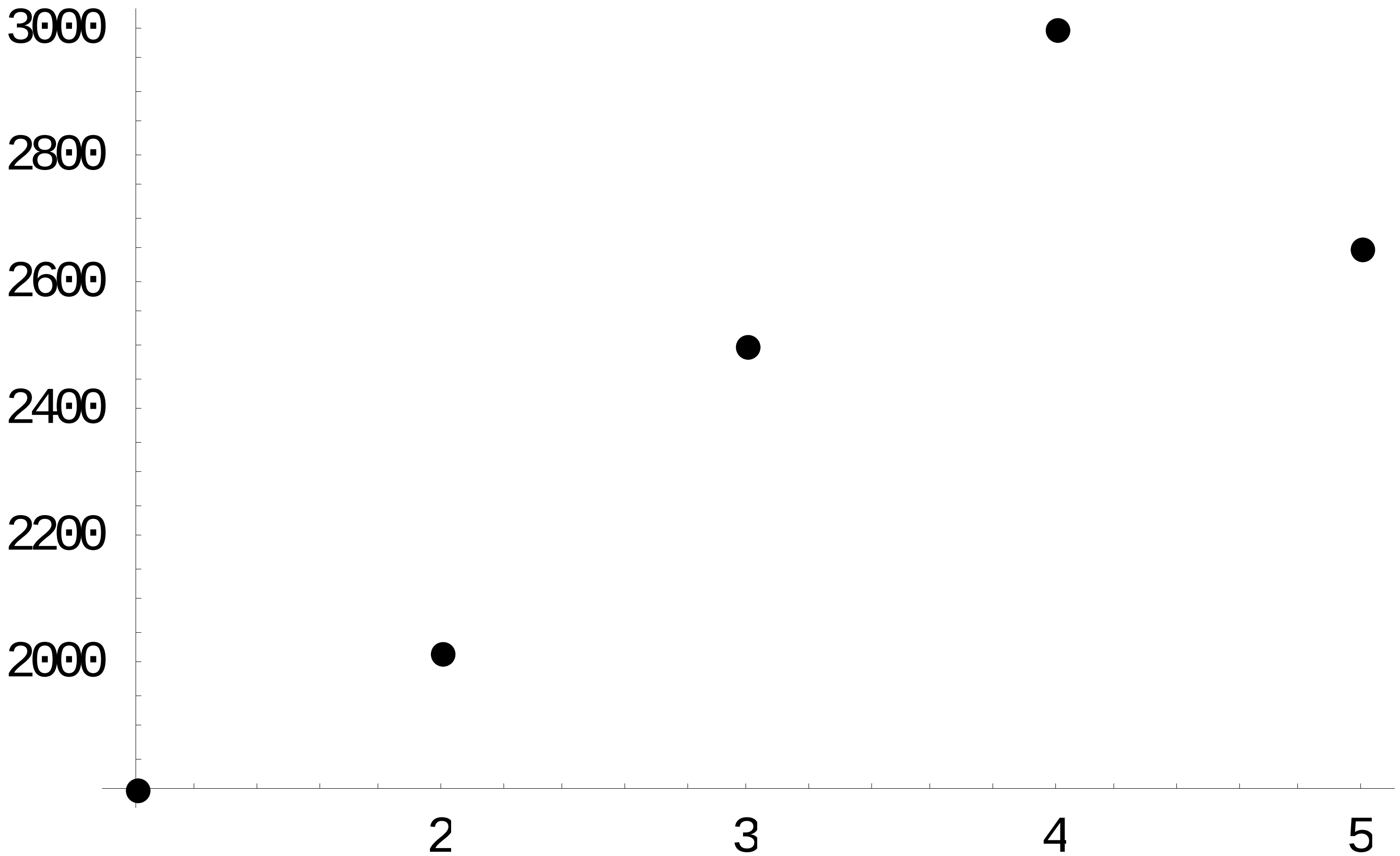
месеци	януари	февруари	март	април	май
***x*-**	1	2	3	4	5
y **- печалба**	1800	2020	2500	3000	2650

- Графично: а) за горния пример с таблично зададена функция

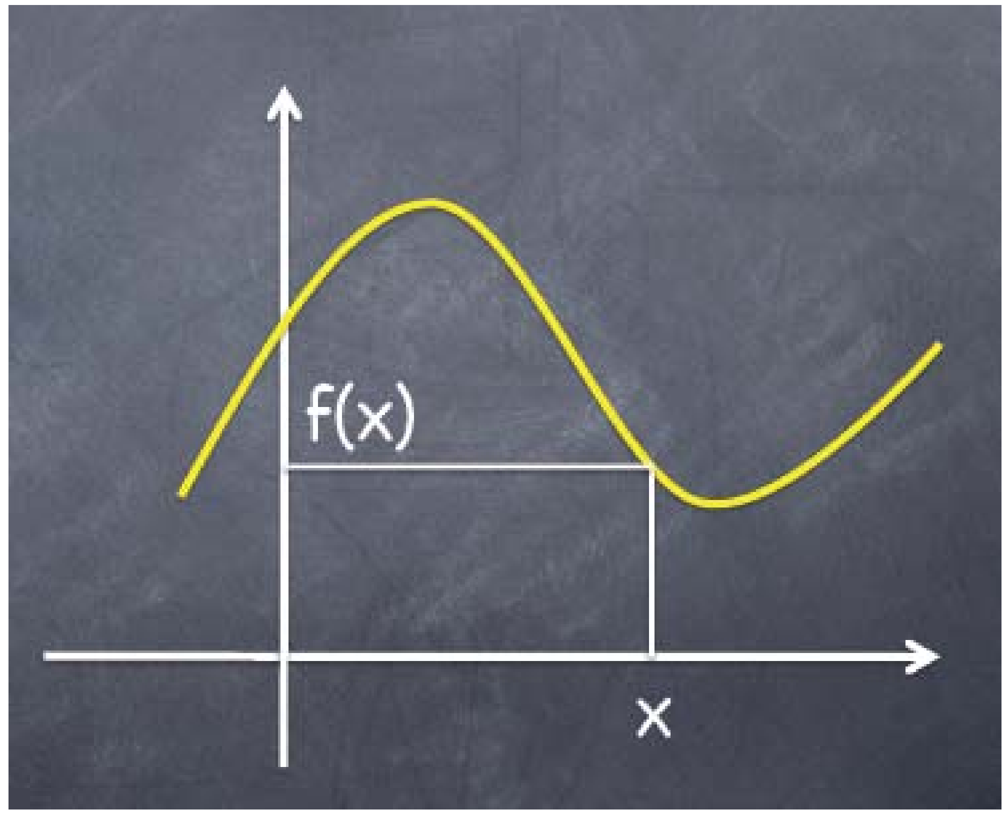


```
xx={1,2,3,4,5}
yy={1800,2020,2500,3000,2650}
data=Table[{xx[[i]],yy[[i]]}, {i,1,5}]
ListPlot[data, PlotStyle→PointSize[0.02]]
```

{{1,1800},{2,2020},{3,2500},{4,3000},{5,2650}}



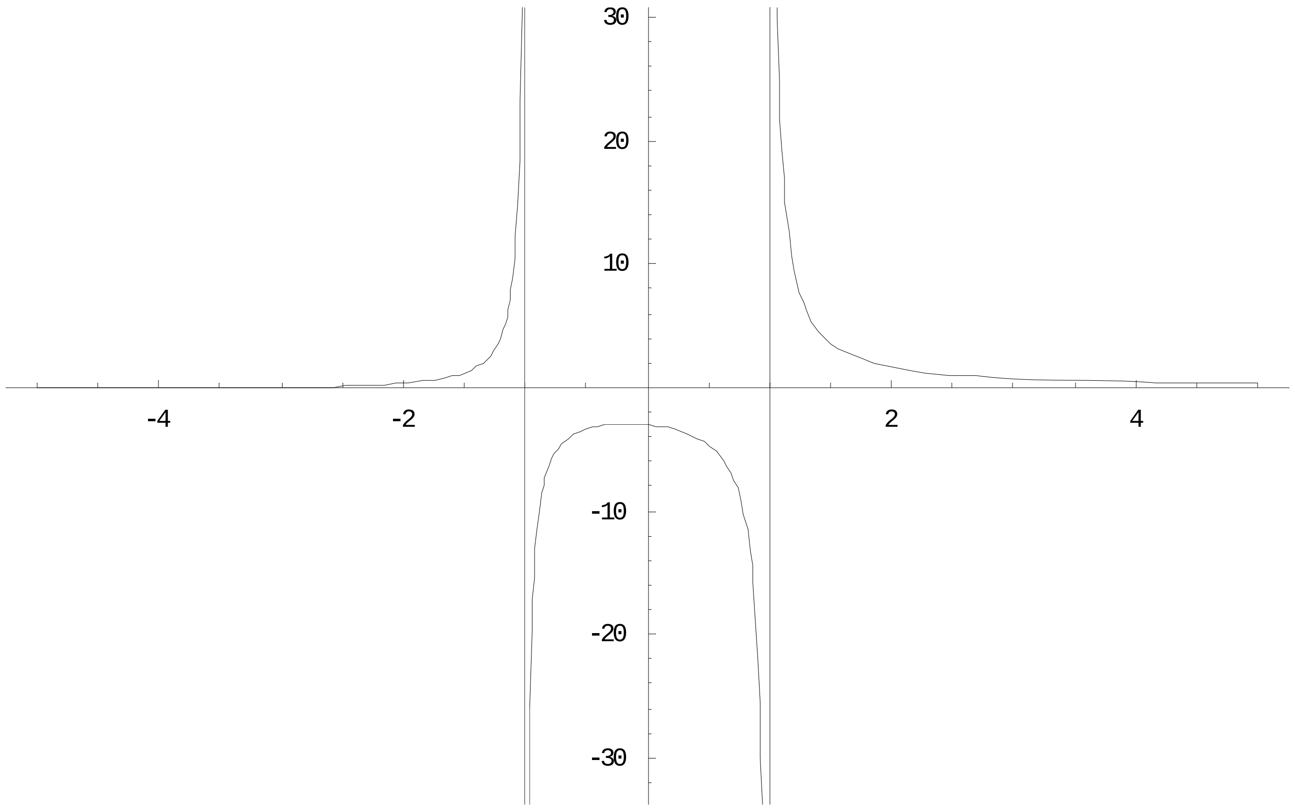
б) Функция, зададена за x в някакъв интервал. Тогава всяка точка с координати (x, y) се чертае с една точка, като y се изчислява (измерва) от формулата или правилото $y = f(x)$.



Пример 2.2. Със система Математика да начертаем ф-ята (**) :

$$y = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$$

```
Plot[y, {x, -5, 5}]
```



Дефиниционна област: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

Леонард Ойлер е един от най-известните математици. Живял е през 18 век. Има голям принос в изучаването на функциите, важна част от математическия анализ.

Задачи за определяне дефиниционната област (ДО) на функции

За да се определи ДО на дадена функция трябва да се има в предвид:

а) къде функционалната стойност не може да се изчисли и

б) дали е зададен отнапред някакъв интервал за ДО.

В първия случай, от ДО трябва да се изключат:

- точките, в които знаменателят става 0, тъй като на нула не се дели;
- областите, за които не съществува квадратен корен, т.е. при наличие на израз от вида $\sqrt{A}$, трябва да се намери за x в кои интервали е валидно неравенството $A < 0$; същото важи и за корен четвърти, шести и т.н.
- областите, за които не съществува логаритъм, тъй като Log (B) съществува само при B>0, и др.

- да се изключат случаите, при които задачата няма реален смисъл, напр. времето винаги е неотрицателна величина, температурата при някой химичен процес не може да е по-ниска от 5°C и др.

Задачи: Да се определят ДО на функциите:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-1}$, б) $f(x)=\ln(\dfrac{x}{x+1})$

Решение:

а) При $x=1$ знаменателят се анулира. Освен това трябва подкоренната величина да е неотрицателна, т.е. $2x-3\geq 0$. Получаваме условията:

$x\geq\dfrac{3}{2}, x\neq 1$, откъдето ДО= $x\geq\dfrac{3}{2}$, т.е. $D=[\dfrac{3}{2},\infty)$.

б) Логаритъмът е определен само при положителен аргумент, т.е. трябва $\frac{x}{x+1} > 0$. Или което същото, $x(x+1) > 0$. Това е квадратно неравенство. Уравнението $x(x+1) = 0$ има корени $x_1 = 0, x_2 = -1$. Произведението е положително в интервалите $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. Точката -1 трябва да се изключи, защото знаменателят не може да е нула. Окончателно отговорът е: $D = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

Свойства на функциите

Определение 2.2. Една функция е ограничена отгоре, ако за всяко $x \in D$ стойностите на функцията не стават безкрайно големи, т.е. съществува положителна константа $M>0$:

$$f(x) \le M \text{, за всяко } x \in D.$$

Определение 2.3. Една функция е ограничена отдолу, ако за всяко $x \in D$ стойностите на функцията не стават безкрайно малки (напр. минус безкрайност), т.е. съществува константа m:

$$f(x) \ge m \text{, за всяко } x \in D.$$

Определение 2.4. Една функция е ограничена, ако за всяко $x \in D$ стойностите на функцията не стават нито безкрайно големи нито безкрайно малки, т.е. съществува положителна константа $M>0$:

$$\left| f(x) \right| \leq M \text{, за всяко } x \in D.$$

В противен случай функцията е неограничена.

Пример 2.3. Очевидно функцията от Пример 2.2. е неограничена.

Граница на функция

Пример. По аналогия с редиците, да разгледаме най-напред функцията

$$y(x)=\frac{1}{x}$$

при $x\to\infty$. Очевидно когато знаменателят расте (става много голям), тази дроб ще има стойности много близки до нулата, както и да избираме стойностите за x (освен нула). В този случай казваме, че функцията е сходяща към нула и нулата е нейната граница. Това се записва така:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

(четем “Лимес от едно върху *x*, при *x* клонящо към безкрайност, е равен на нула”). Това се вижда и от следната таблица с няколко различни x:

x	y
1	1
10	0,1
100	0,01
500	0,002
1000	0,001

Определение 2.5. Функцията $f(x)$ има граница $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, при x клонящо към дадена (крайна) т. x_0, когато за всяко положително число ε съществува положително число δ, такова че за всяко x, за което $0 < |x - x_0| < \delta$, функцията $f(x)$ е дефинирана и $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Да припомним, че неравенството $0 < |x - x_0| < \delta$ означава, че $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, т.е. $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогава определението 2.5. означава, че когато за всяко x, което е в достатъчно малък интервал около x_0 съответната стойност на функцията $f(x)$ е достатъчно близо до L (в малък интервал около L), функцията $f(x)$ има граница L.

Определение 2.6. Функцията $f(x)$ има граница $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, при x клонящо към $+\infty$, когато за всяко положително число ε съществува положително число N, такова че за $x > N$ функцията $f(x)$ е дефинирана и $\left|f(x) - L\right| < \varepsilon$.

Аналогично се определя границата на функция при x клонящо към $-\infty$.

Когато граница не съществува, а функцията расте (намалява) към безкрайност (минус безкрайност), можем да пишем условно сходимост към $\pm\infty$.

Например: $\lim\limits_{x\to\pm 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$.

Аритметични действия за граници на функции

Те са напълно аналогични на действията със сходящи редици.

Ако съществуват границите: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, а λ е реално число, то:

А) $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L + M$ - сума

Б) $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda L$ - умножение с константа

В) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $g(x) \neq 0, M \neq 0$ - деление

Тук x_0 може да бъде крайно число, $+\infty$ или $-\infty$.

Забележителни граници на функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$$

В изчисленията тези граници могат да се ползват наготово.

Задачи за граници. Намерете границите на функциите:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2+7)}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\dfrac{2.1^2+7}{1+1}=\dfrac{9}{2}$, няма никаква особеност.

Заместваме директно $x=1$ и изчисляваме по правилата за граници.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2+3)}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=\dfrac{2.1^2+3}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=\left[\dfrac{5}{0}\right]$ - Границата не съществува, защото числителят е ограничен (равен на 5), а знаменателят клони към нула, следователно дробта може да става $\pm\infty$ при $x\to 1$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2+x-3)}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, т.е. получаваме нула и в числителя и в знаменателя при $x=1$. Значи $x=1$ е корен както на числителя, така и на знаменателя. За да решим задачата ще изолираме множител $(x-1)$, с цел да го съкратим за $x\neq 1$. Наистина решаваме квадратното уравнение за числителя и получаваме корени $x_1=1, x_2=\dfrac{-3}{2}$. Оттам след разлагането на числителя на дроби, намираме:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2+x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2x+3)=2.1+3=5.$$

Тук сме съкратили "особеността" $(x-1)$.

4. $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+2x+1}{x^2-x+5}=[\frac{\infty}{\infty}]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{1}=3$$

Особеността е в безкрайност. Затова изваждаме като множител x^2, което дава особеността, за да я съкратим. В скобите при $x\to\pm\infty$ използваме основната граница $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty].[0]$.

Ще рационализираме втория множител. Получаваме:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Тук в последния ред отново е изнесен пред скоби множителят, който дава особеността ($x\to\infty$), за да го съкратим.

6. Използване на забележителни граници – пример.

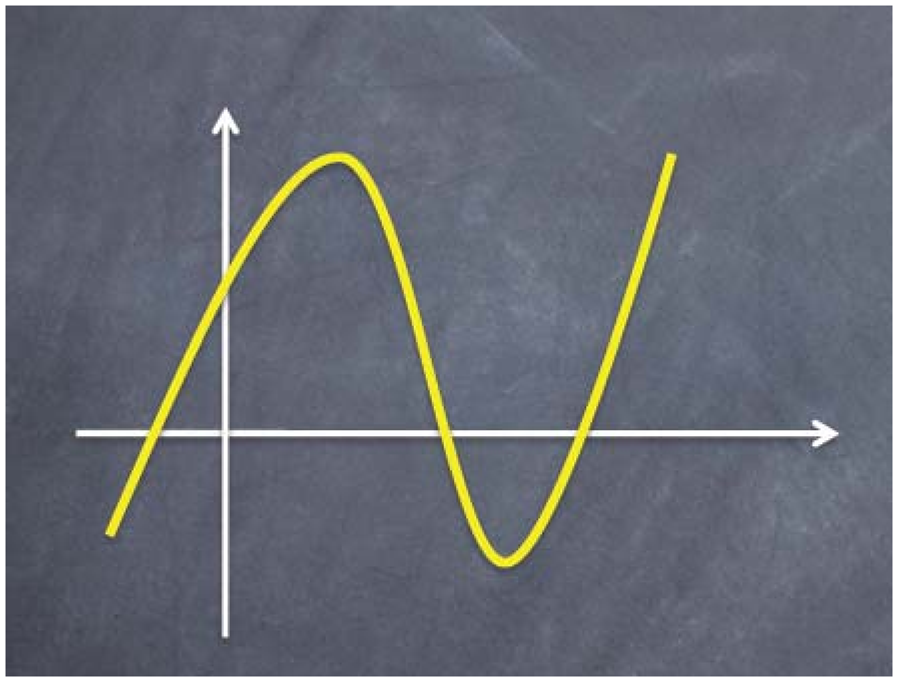
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3.4.x}.\frac{3.4.x}{\sin 4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}.3\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$=\frac{3}{4}.1.1=\frac{3}{4}$$

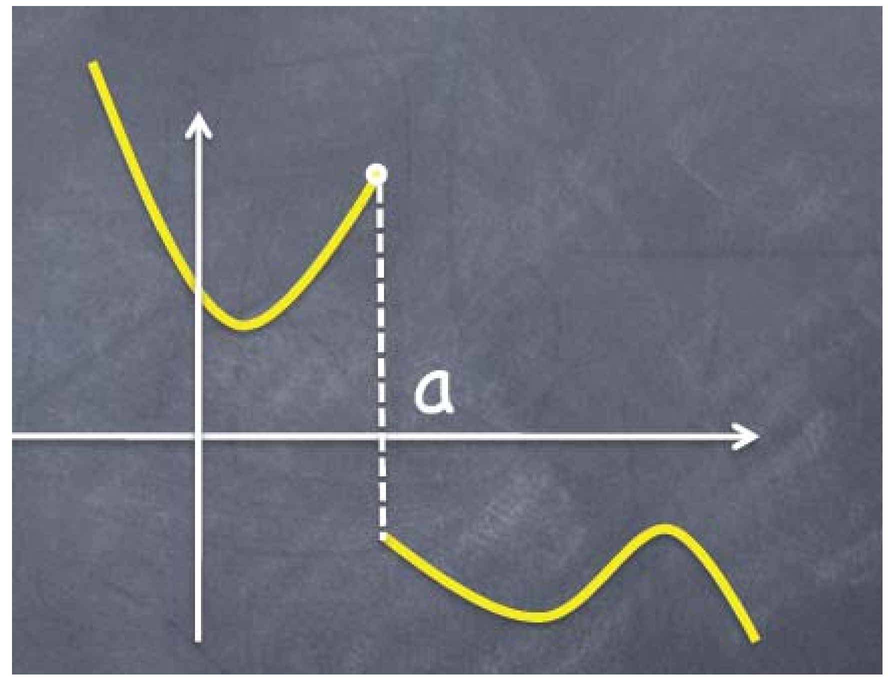
.

Определение 2.7. Функцията $f(x)$ е <u>непрекъсната</u> в крайна т. $x_0 \in D$, когато съществува границата $\lim_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Непрекъснатост и прекъснатост на функция --→ примерни графики



Непрекъсната функция
във всяка точка от D



Прекъсната функция в точката ***x=a,***
в останалите точки е непрекъсната

Пример. Изследвайте за непрекъснатост функцията $f(x)$ в точката $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Решение:

Дефиниционната област е: $(-\infty, \infty)$.

Случай а) нека $x_0 \neq 0$. Тогава имаме $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Границата може да се намери по теоремите за действия с граници на функции:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to x_0} x.\lim_{x\to x_0}\sin\frac{1}{x} = x_0\sin\left(\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}\right)$$

$$= x_0\sin\frac{1}{x_0} = f(x_0) \qquad .$$

Всички пресмятания са възможни, защото $x_0 \neq 0$ и делението е възможно.

Напр. ако $x_0 = 1$, с калкулатор или компютър изчисляваме

Sin[1.]

0.841471

Ако $x_0 = 1^0$ в градуси, а не в радиани, тогава:

```
dd = 1. Degree
dd*Sin[1/dd]
```

0.0174533

0.0118599

Следователно : $\lim\limits_{x\to 1^0}(x\sin\frac{1}{x}) = 1^0\sin\frac{1}{1^0} = 0.0118599.$

<u>Случай б)</u> нека $x_0 = 0$. Тогава имаме $f(0) = 0$. Ще установим най-напред, че съществува граница при $x_0 \to 0$ и след това тя трябва да е равна на 0, за да имаме непрекъснатост по горното определение 2.5.

Ако се опитаме директно да заместим x с 0, ще получим

$0.\sin\frac{1}{0} = 0.\sin(\infty)$. Тук обаче забелязваме, че синусът както и да се променя е ограничен, тъй като не може да стане по абсолютна стойност по-голям от 1, за реални x. Или $|\sin(t)| \le 1$ за всяко реално $t \in (-\infty, \infty)$.

Тогава решаваме задачата елементарно така. От неравенството

$$0 \le |f(x)| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|.\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|.1$$

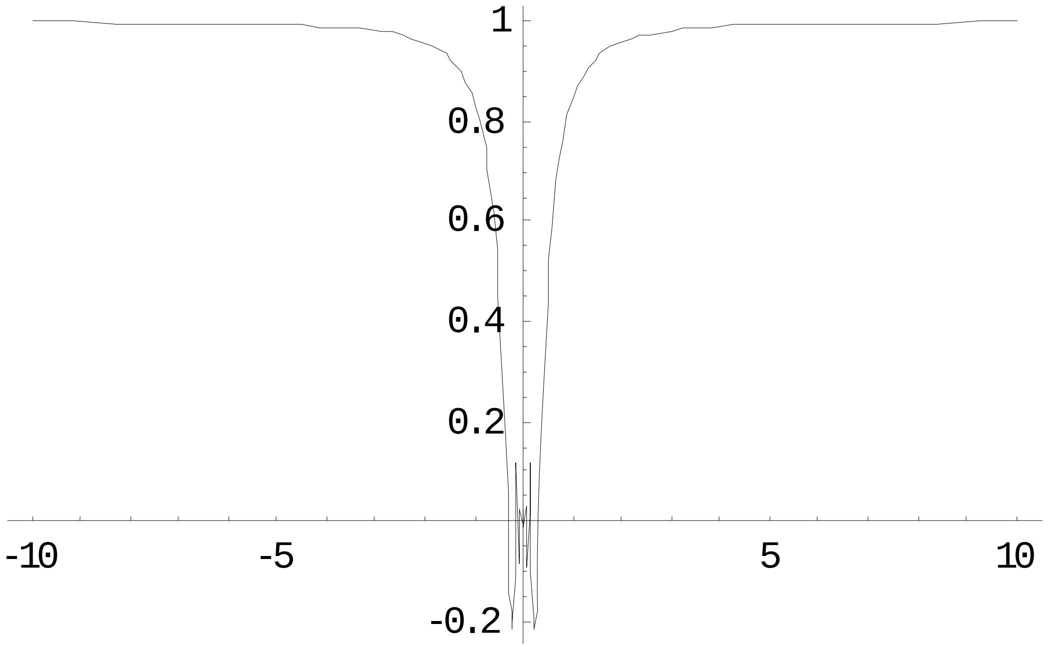
следва, че при $x \to 0$ с прилагане на теоремата за сравнение на граници (лекция 1, слайд 10-11): $0 \leq \lim\limits_{x\to 0}|f(x)| \leq \lim\limits_{x\to 0}|x|.1 = 0$.

Следователно $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Тъй като границата съществува и е равна на 0, колкото е $f(0)$, заключаваме, че функцията е непрекъсната в точката 0.

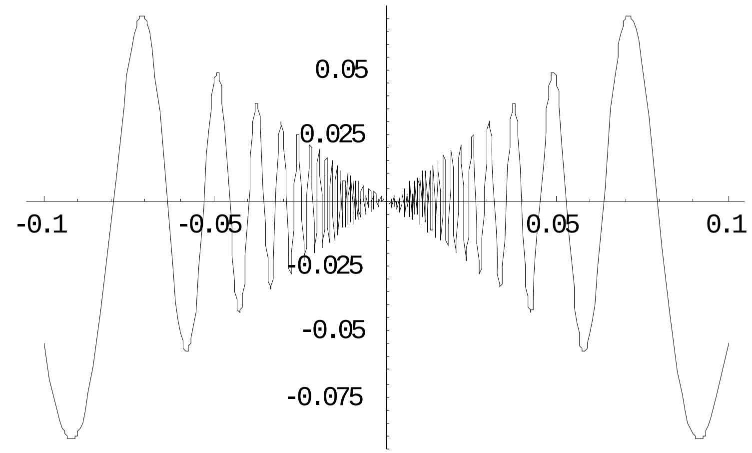
<u>От случаите а) и б) следва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната за всяко x от дефиниционната си област.</u>

С помощта на система Mathematica нека начертаем функцията, за да видим как изглежда: отначало в интервала [-10; 10], а след това и близо около нулата – в интервала [-0.1; 0.1]. Очевидно функцията става 0 близо до x=0 осцилирайки около 0 и цялата графика е на непрекъсната функция.

$\texttt{Plot}[x*\texttt{Sin}[\frac{1}{x}], \{x, -10, 10\}]$



$\texttt{Plot}[x*\texttt{Sin}[\frac{1}{x}], \{x, -0.1, 0.1\}]$



Освен това, директно намирайки границата, виждаме, че тя е 0:

$\texttt{Limit}[x*\texttt{Sin}[\frac{1}{x}], x \to 0]$

0